Jorge Doménech Romá

POLIEDROS REGULARES
Geometría Descriptiva

2ª edición

DEPARTAMENTO DE EXPRESIÓN GRÁFICA Y CARTOGRAFÍA

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Título: POLIEDROS REGULARES. Geometría Descriptiva
Autor: Jorge Doménech Romá

I.S.B.N.: 84-8454-266-1
Depósito legal: A-843-2003

Edita: Editorial Club Universitario Telf.: 96 567 61 33
C/ Cottolengo, 25 – San Vicente (Alicante)
www.ecu.fm

Printed in Spain
Imprime: Imprenta Gamma Telf.: 965 67 19 87
C/ Cottolengo, 25 – San Vicente (Alicante)
www.gamma.fm
gamma@gamma.fm

PRÓLOGO

La presente publicación desarrolla los poliedros regulares, centrándose exclusivamente en ese tema.

Existe un número muy elevado de relaciones curiosas, coincidencias y particularidades geométricas entre los poliedros regulares que hacen referencia fundamentalmente a inscribir, circunscribir e interseccionar unos poliedros con otros; por ejemplo, "uniendo los puntos medios de las aristas del tetraedro, excepto aquellos puntos medios de aristas que sean opuestas al centro geométrico, obtenemos un octaedro inscrito al tetraedro cuya magnitud de la arista es la mitad de la arista del tetraedro". El estudio de esas curiosidades geométricas excede el objeto y la intención de este, trabajo monográfico sobre "poliedros regulares convexos". Lo mismo podríamos decir de los POLIEDROS SEMIREGULARES. Si estudiamos los POLIEDROS CONJUGADOS porque esa coincidencia y particularidad se produce sistemáticamente en los cinco poliedros regulares y por tanto es susceptible de una racionalización y explicación global de la misma.

Se ha procurado en este trabajo huir de un enfoque aritmético matemático sobre poliedros centrándonos en un enfoque visual, intuitivo y geométrico de esta materia, como le corresponde, considerada como parte de la asignatura de GEOMETRÍA DESCRIPTIVA.

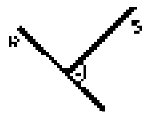
En los primeros capítulos "ÁNGULOS DIEDROS, TRIEDROS Y POLIEDROS" Y "POLIEDROS", se han recopilado los axiomas, definiciones y teoremas que inciden sobre la materia objeto de este trabajo y que su exposición previa es imprescindible para una comprensión total de los poliedros regulares.

J. DOMÉNECH

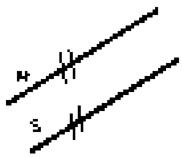
NOMENCLATURA Y SIMBOLOGIA UTILIZADA

A Punto A del espacio
a Proyección horizontal del punto A
a' Proyección vertical del punto A
a" Tercera proyección del punto A; o sea proyección sobre un plano de perfil del punto A

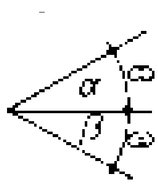
(A) Posición abatida del punto A
A_1 Posición del punto A en el espacio después del primer giro o cambio de plano
A_2 Posición del punto A en el espacio después del segundo giro o cambio de plano
a_1 Nueva proyección horizontal de A después del primer giro o cambio de plano
a'_1 Nueva proyección vertical de A después del primer giro o cambio de plano



Perpendicularidad entre R y S



Paralelismo entre R y S



Igualdad de ángulos entre α y β

Ch	Charnela
A_h	Sombra arrojada del punto A sobre el plano horizontal de proyección
A_C	Sombra arrojada del punto A sobre el plano vertical de proyección
A_Z	Azimut solar
h	Altura solar

TEMA I

ÁNGULOS DIEDROS, TRIEDROS Y POLIEDROS

1.1 **DEFINICIONES:**

ÁNGULO DIEDRO: Aquella porción del espacio comprendida y limitada por dos semiplanos que tienen en común la recta que los define, (Fig. 1)

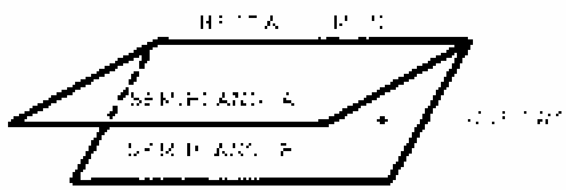


Figura 1

ÁNGULO TRIEDRO: (Definición l);Aquella porción del espacio comprendida y limitada por tres diedros, en los cuales las rectas que delimitan los respectivos semiplanos de los diedros tienen un punto común, (Fig.2)

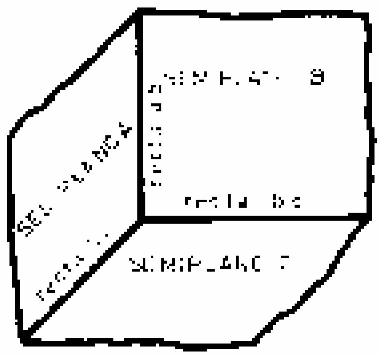


Figura 2

El diedro AB, BC y AC forman triedro, si se cumple, que la recta AB, la recta BC y la recta AC, tienen un punto común.

(Definición 2); Aquella parte del espacio comprendida y limitada por tres planos que se cortan dos a dos y tienen un punto común, (Fig. 2)

ÁNGULO POLIEDRO: Aquella parte del espacio comprendida y limitada por varios planos que se cortan dos a dos y tienen un punto común, (Fig. 3)

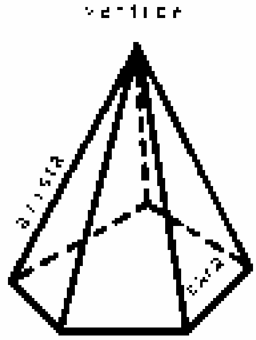


Figura 3

PARTES DE UN ÁNGULO POLIEDRO: ARISTA: intersección de dos caras. VÉRTICE: punto común de todas las aristas. CARA: Porción de plano comprendida entre dos aristas consecutivas.

Dentro del concepto geométrico de ÁNGULO POLIEDRO conviene diferenciar a su vez dos conceptos ligados a él; en todo ángulo poliedro podremos hablar siempre de dos “ángulos”: (Fig. 4).

ÁNGULO DE UNA CARA: Es el ángulo que una cara -que es una porción de plano limitada por dos aristas consecutivas- forma entre sus aristas.

ÁNGULO DE UN DIEDRO: Es el ángulo que un diedro concreto, del ángulo poliedro, forma entre las caras que lo configuran

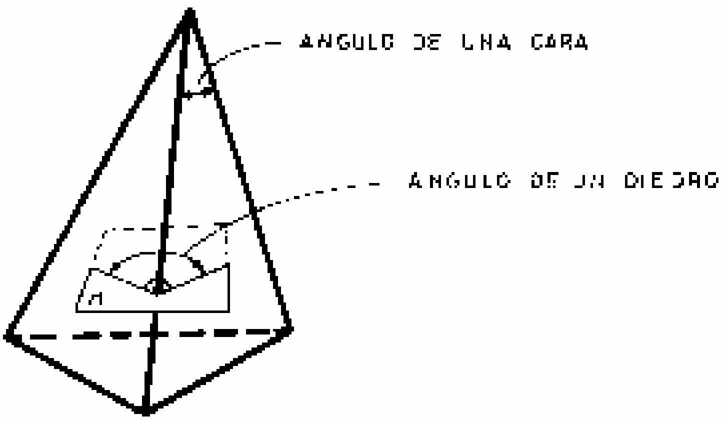


Figura 4

Los ángulos poliedros reciben nombre propio según el número de caras que concurren en su vértice, así tendremos:

	DENOMINACIÓN
ANGULO POLIEDRO DE TRES CARAS	ANGULO TRIEDRO
ANGULO POLIEDRO DE CUATRO CARAS	ÁNGULO TETRAEDRO
ÁNGULO POLIEDRO DE CINCO CARAS	ÁNGULO PENTAEDRO
ANGULO POLIEDRO DE SEIS CARAS	ÁNGULO HEXAEDRO

1.2. ANGULO POLIEDRO CONVEXO Y CÓNCAVO:

Los ángulos poliedros se clasifican en cóncavos o convexos según que la sección producida por un plano que corte a todas las aristas sea un polígono cóncavo o convexo, (Figs. 5 y 6)

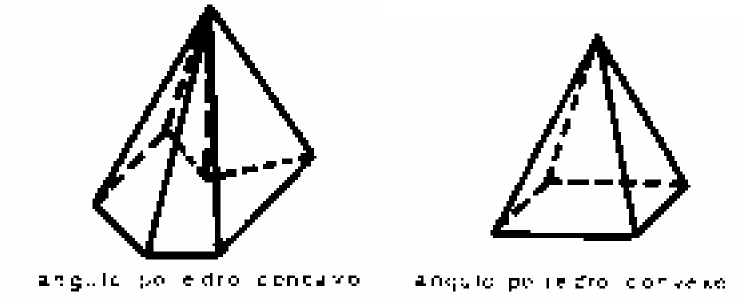


Figura 5 y 6

1.3. ANGULOS POLIEDROS OPUESTOS POR EL VÉRTICE:

Los ángulos poliedros son opuestos por el vértice cuando se da la circunstancia de que las aristas de uno y otro son respectivamente semirrectas pertenecientes a una misma recta, (Fig. 7)

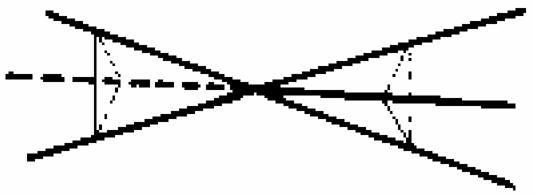


Figura 7

1.4. **TIPOS DE ÁNGULOS TRIEDROS:**

Esta clasificación se hace en base a comparar unas caras con otras, denominaremos:

ESCALENO: Cuando las tres caras son desiguales.
ISÓSCELES: Cuando tienen dos caras iguales.
EQUILÁTERO: Cuando tienen las tres caras iguales.
TRIRRECTÁNGULO: Cuando sus diedros y caras son rectas.
BIRRECTÁNGULO: Cuando tiene únicamente dos diedros rectos.

1.5. **IGUALDAD DE ÁNGULOS TRIEDROS:**

Dos triedros son iguales, cuando tienen sus diedros y sus caras respectivamente iguales,

Para demostrar que dos triedros son iguales, no es necesario verificar que todos sus elementos son iguales, sino que dada la interrelación existente entre ellos, bastará demostrar que tres elementos debidamente elegidos sean iguales, pudiéndose dar los siguientes casos:

1º.Dos ángulos triedros que tienen sus tres caras respectivamente iguales, son iguales.

2º.Dos ángulos triedros que tienen dos caras y el diedro comprendido respectivamente iguales, son iguales.

3º.Dos ángulos triedros que tienen una cara y los dos diedros adyacentes respectivamente iguales, son iguales.

4º.Dos ángulos triedros que tienen sus tres diedros respectivamente iguales, son iguales.

1.6**. IGUALDAD DE ÁNGULOS POLIEDROS:**

Dos ángulos poliedros son iguales cuando se pueden descomponer en igual número de ángulos triedros iguales.

1.7**. TEOREMAS DE LOS ÁNGULOS TRIEDROS:**

TEOREMA 1: En todo ángulo triedro, el ángulo de una cara es menor que la suma de los dos ángulos de las otras caras y mayor que su diferencia.

TEOREMA II: En todo ángulo triedro, la suma de los ángulos de los diedros es mayor que dos rectos y menor que seis rectos.

1.8. **TEOREMAS DE LOS ÁNGULOS POLIEDROS:**

TEOREMA 1: En todo ángulo poliedro, el ángulo de una cara es menor que la suma de los ángulos de las demás caras.

TEOREMA II: En todo ángulo poliedro convexo, la suma de los ángulos de sus caras es menor que cuatro rectos.

TEOREMA III: En un ángulo poliedro de n caras, la suma de los ángulos de sus diedros es mayor que 2 (n-2) rectos y menor que 2n rectos.

TEMA II

POLIEDROS

2.1. DEFINICIÓN:

Poliedro es aquella porción del espacio cerrada y limitada por superficies planas poligonales de tal forma que cada lado pertenece simultáneamente a dos polígonos continuos y dos polígonos cualesquiera con un lado común pertenecen a distintos planos.

2.2. PARTES DE UN POLIEDRO:

CARA: Porción de plano de contorno poligonal que limita al poliedro.
ARISTA: Intersección de dos caras.
VÉRTICE: Intersección de las aristas.
ÁNGULOS DIEDROS: Los formados por dos caras que tienen una arista común.
ÁNGULOS POLIEDROS: Los formados por varias caras que tienen un vértice común.
DIAGONAL: Segmento de recta que une dos vértices no situados en una misma cara y que contiene al centro geométrico del poliedro.
Definiremos SUPERFICIE de un poliedro, a la suma de la superficie de sus caras.
Definiremos VOLUMEN de un poliedro al interior y delimitado por sus caras.

2.3. POLIEDROS CONVEXOS Y CÓNCAVOS:

Un poliedro es convexo cuando todo él está ubicado en el mismo semiespacio determinado por los planos que forman sus caras. Siendo cóncavo en caso de no cumplirse lo anterior.

2.4. POLIEDROS IGUALES:

Dos poliedros son iguales si tienen iguales sus caras, aristas, ángulos diedros y ángulos poliedros.

2.5. POLIEDROS EQUIVALENTES:

Dos poliedros son equivalentes cuando tienen el mismo volumen.

2.6. **POLIEDROS REGULARES:**

Un poliedro es regular cuando tiene todos sus ángulos poliedros iguales, siendo todas sus caras polígonos regulares.

De las definiciones y teoremas anteriormente expuestos llegamos a la conclusión de que el NÚMERO DE POLIEDROS REGULARES CONVEXOS ES LIMITADO. En efecto, recordemos los axiomas, definiciones y teoremas que nos limitan el número de poliedros regulares convexos, pues actúan como múltiples condicionantes geométricos referidos tanto a los poliedros en sí, como a los ángulos poliedros que los configuran.

I LAS CARAS DE UN POLIEDRO REGULAR CONVEXO DEBERÁN SER IGUALES Y SER POLÍGONOS REGULARES.

II PARA QUE PUEDA FORMARSE UN ÁNGULO POLIEDRO HACE FALTA, AL MENOS TRES CARAS.

III LA SUMA DE LOS ÁNGULOS DE LAS CARAS CONCURRENTES EN EL VÉRTICE DE UN ÁNGULO POLIEDRO DEBE SER SIEMPRE MENOR QUE 360º.

2.7. **POSIBLES POLIEDROS REGULARES CONVEXOS:**

Partamos de la hipótesis de que las caras de un poliedro son triángulos equiláteros y veamos cuantos poliedros nos salen con ese polígono como cara. Para ello comprobemos el cumplimiento de las tres condiciones anteriores:

El ángulo poliedro compuesto por TRES CARAS (triángulos equiláteros):

CUMPLE: el primer condicionante, al ser las caras polígonos regulares.

CUMPLE: el segundo condicionante, para que se pueda formar un ángulo poliedro hacen falta al menos tres caras.

CUMPLE: el tercer condicionante: $3 \times 60\,º = 180\,º < 360\,º$.

En efecto:

"CUATRO TRIÁNGULOS EQUILÁTEROS UNIDOS DE TRES EN TRES DAN ORIGEN AL TETRAEDRO REGULAR", (Fig. 8).

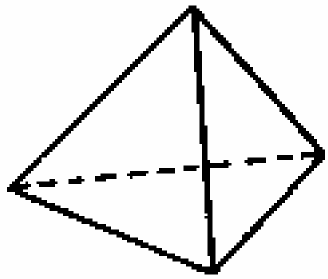


Figura 8

El ángulo poliedro compuesto por CUATRO CARAS (triángulos equiláteros):

CUMPLE: El primer condicionante; las caras son polígonos regulares.

CUMPLE: El segundo condicionante; para que se pueda formar un ángulo poliedro hacen falta al menos tres caras.

CUMPLE: El tercer condicionante; $4 \times 60^{\circ} = 240^{\circ} < 360^{\circ}$.

En efecto:

OCHO TRIÁNGULOS EQUILÁTEROS UNIDOS DE CUATRO EN CUATRO DAN ORIGEN AL OCTAEDRO REGULAR, (Fig.9).

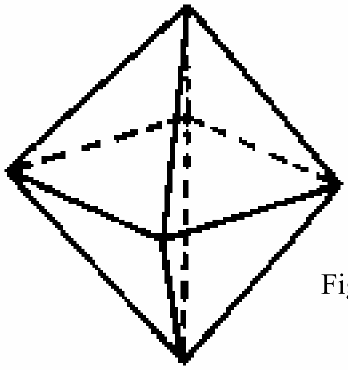


Figura 9

El ángulo poliedro compuesto por CINCO CARAS (triángulos equiláteros).

CUMPLE: El primer condicionante, las caras son polígonos regulares.

CUMPLE: El segundo condicionante, para que se pueda formar un ángulo poliedro hacen falta al menos tres caras.

CUMPLE: El tercer condicionante, $5 \times 60^{\circ} = 300^{\circ} < 360^{\circ}$.

En efecto:

VEINTE TRIÁNGULOS EQUILÁTEROS UNIDOS DE CINCO EN CINCO DAN ORIGEN AL ICOSAEDRO REGULAR. (Fig. 10).

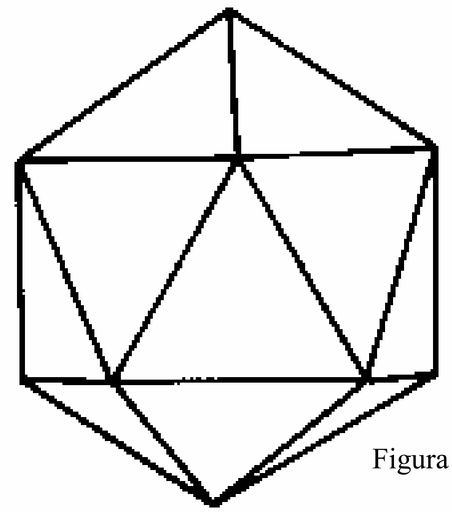


Figura 10

Si intentáramos un nuevo ángulo poliedro compuesto por SEIS CARAS (triángulos equiláteros), nos incumpliría uno de los condicionantes expuestos, en efecto:

$$6 \times 60^{o} = 360^{o}.$$

Imposibilidad, por tanto, de formar un ángulo poliedro y hemos agotado la formación de posibles poliedros regulares que tengan por caras triángulos equiláteros.

Partamos de la hipótesis de que las caras de un poliedro son cuadrados y veamos cuantos poliedros nos salen con este polígono como cara.

El ángulo poliedro compuesto por TRES CARAS (cuadrados).

CUMPLE: Con el primer condicionante, las caras son polígonos regulares.

CUMPLE: Con el segundo condicionante, para que se pueda formar un ángulo poliedro hacen falta al menos tres caras.

CUMPLE: Con el tercer condicionante, $3 \times 90^{o} = 270^{o} < 360^{o}$.

En efecto:

SEIS CUADRADOS UNIDOS DE TRES EN TRES DAN ORIGEN AL HEXAEDRO O CUBO. (Fig. 11)

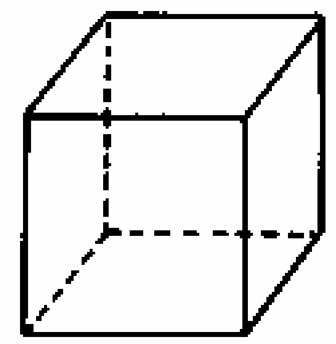


Figura 11

Si intentáramos formar un ángulo poliedro con cuatro cuadrados tendríamos $4 \times 90^{0} = 360^{0}$.

Imposibilidad, por tanto, de que existan ángulos poliedros y poliedros regulares, compuestos por cuatro caras o más, siendo el polígono de la cara un cuadrado.

Partamos de la hipótesis de que las caras de un poliedro son pentágonos regulares.

El ángulo poliedro compuesto por tres caras (pentágonos).

CUMPLE: El primer condicionante, las caras son polígonos regulares.

CUMPLE: El segundo condicionante, para que se pueda formar un ángulo poliedro hacen falta, al menos, tres caras.

CUMPLE: El tercer condicionante, $3 \times 108^{o} = 324^{o} < 360^{o}$

En efecto:
DOCE PENTAGONOS REGULARES UNIDOS DE TRES EN TRES DAN ORIGEN AL DODECAEDRO REGULAR, (Fig. 12).

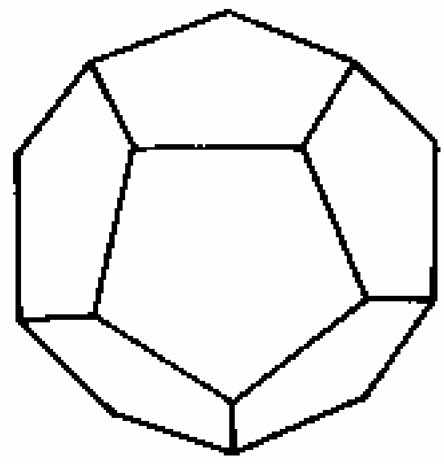


Figura 12

Partamos de la hipótesis de un posible poliedro regular convexo cuyas caras fueran hexágonos regulares.

Incumpliría en tercer condicionante, dado que, 3 x 120 º = 360 º.

Imposibilidad por tanto, de que se forme un poliedro regular.

Si intentáramos que se formaran poliedros regulares convexos en algún caso distinto de los estudiados, comprobaríamos que tal intento es infructuoso, quedando reducido el número de poliedros regulares convexos a CINCO.

2.8 **ARISTAS Y VÉRTICES DE LOS POLIEDROS REGULARES:**

Dado que cada arista de un poliedro es la intersección de dos caras; la suma de lados de todas las caras será el doble del número de aristas. Luego tendremos que siendo C el número de caras y L el número de lados de cada cara:

Nº de aristas del poliedro = $\frac{C \times L}{2}$

Podemos afirmar que el número de aristas de un poliedro es igual al "SEMIPRODUCTO DEL NUMERO DE CARAS POR EL NUMERO DE LADOS DE CADA CARA".

Si en cada vértice del poliedro concurren n vértices de las caras, el número de vértices del poliedro será la enésima parte de la suma de todos los vértices de las caras.

Denominando n al número de caras que concurren en cada vértice, tendremos con la misma nomenclatura:

Nº de vértices del poliedro = $\frac{L \times C}{n}$

Lo que podemos expresar literariamente diciendo: “EL NÚMERO DE VÉRTICES DE UN POLIEDRO ES IGUAL AL PRODUCTO DEL NUMERO DE CARAS, POR EL NÚMERO DE LADOS DE CADA CARA, DIVIDIDO POR EL NÚMERO DE CARAS QUE CONCURREN EN CADA VÉRTICE”.

2.9. **TEOREMA DE EULER:**

Este teorema relaciona el número de caras, aristas y vértices existentes en un poliedro regular convexo y su enunciado es el siguiente:

“EN TODO POLIEDRO REGULAR CONVEXO LA SUMA DEL NUMERO DE CARAS Y EL NÚMERO DE VÉRTICES ES IGUAL AL NÚMERO DE ARISTAS MÁS DOS”.

$$C + V = A + 2$$

DEMOSTRACION:

Imaginemos una superficie poliédrica ABIERTA según una línea poligonal ABCDEFGH (Fig. 13), la mencionada superficie cumple en sus elementos la siguiente relación:

$$C + V = A + 1$$

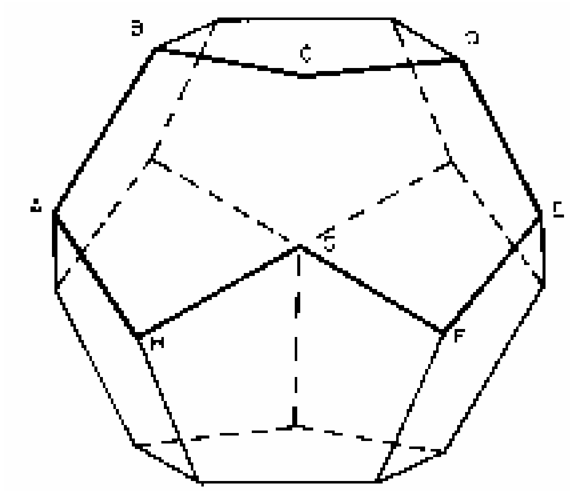


Figura 13

Para demostrar la anterior expresión utilizaremos el “principio de inducción”:

Se cumple para una cara; 1+ V = A + 1

En efecto, en el caso de una sola cara el número de vértices es igual al número de aristas.

Se cumple para n caras, en efecto, en la figura 13 se cumple:

$$C + V = A + 1 \quad (1)$$
$$10 + 20 = 29 + 1$$

Si añadiéramos una cara más -la CDEFG- el poliedro tendría n + 1 caras y estaría abierto por la cara ABCGH (Fig. 14) la cara añadida tiene n lados y n vértices, pero como la superficie poliédrica sigue abierta, el contorno de la cara añadida no puede coincidir con la poligonal que existía antes de añadir la cara, únicamente coincidirán q de los n lados, por tener sólo q lados comunes con la superficie. La cara añadida y la superficie tendrán q + 1 vértices comunes. Luego las caras son ahora C + 1, los vértices V + n - (q + 1) y las aristas A + n –q, sustituyendo lo anterior en la expresión que intentamos demostrar (1) tendremos:

$$C + 1 + V + n - (q + 1) = A + n - q + 1$$

Eliminando elementos comunes en ambos lados de la igualdad obtendremos:

$$C + V = A + 1$$

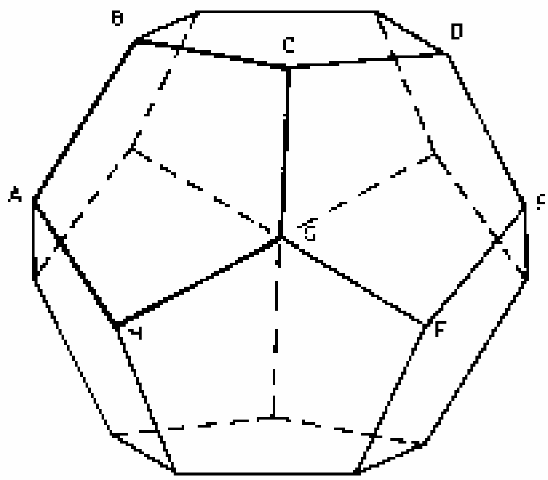


Figura 14

Luego la expresión (1) está demostrada.

Al añadir la última cara que cierra la superficie poliédrica, la ABCGH (Fig. 14), el número de vértices y aristas no aumenta, pero sí aumenta en una unidad el número de caras, luego en la fórmula (1) que acabamos de demostrar si el primer miembro de la igualdad ha aumentado en una unidad para que persista la igualdad deberemos de aumentar el segundo miembro en una unidad, entonces:

$$C + V = A + 2$$

Luego el Teorema de Euler queda demostrado.

Aplicando el Teorema de Euler en los poliedros regulares tendremos el siguiente cuadro de elementos:

POLIEDRO	CARAS	ARISTAS	VERTICES	CARAS	ANGULO POLIEDRO
TETRAEDRO	4	6	4	TRIÁNGULO	TRIEDRO
HEXAEDRO	6	12	8	CUADRADO	TRIEDRO
OCTAEDRO	8	12	6	TRIÁNGULO	TETRAEDRO
DODECAEDRO	12	30	20	PENTÁGONO	TRIEDRO
ICOSAEDRO	20	30	12	TRIÁNGULO	PENTAEDRO

2.10. RELACIÓN DE LAS ESFERAS CON TODOS LOS POLIEDROS:

Todo poliedro regular convexo admite siempre tres tipos de esferas con él relacionadas:

La ESFERA CIRCUNSCRITA (tangente a todos sus vértices)

La ESFERA INSCRITA (tangente a todas sus caras)

LA ESFERA TANGENTE A LAS ARISTAS

Cuyos centros coinciden con el centro geométrico del poliedro.

2.11. LA SECCIÓN PRINCIPAL DE LOS POLIEDROS:

Definiremos SECCIÓN PRINCIPAL de un poliedro, a aquella sección plana en la cual están contenidas y por tanto definidas las magnitudes de los ELEMENTOS DETERMINANTES del poliedro.

Para que un poliedro quede definido bastará saber la magnitud de uno sólo de esos elementos determinantes; pues dada la interrelación existente entre ellos, fijando la magnitud de uno, queda fijada la magnitud de los restantes. Podemos definir, por tanto, como ELEMENTOS DETERMINANTES a aquellos elementos de un poliedro regular que por sí solos determinan y definen al propio poliedro.

En la sección principal están también contenidos los radios de las circunferencias anteriormente mencionadas y que denominaremos de la siguiente forma:

RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA	R
RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA INSCRITA	r
RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA TANGENTE A LAS ARISTAS	r’

La obtención de la sección principal es, por tanto, un paso previo imprescindible para la representación del poliedro en cualquier Sistema de Representación.